$\Delta = 14^2 - 4\,x(-4)x(-12) = 196 - 192 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$

Donc $x' = \frac{-14+2}{-8} = \frac{3}{2}$ et $x'' = \frac{-14-2}{-8} = 2$

Or 2 est solution de l'équation (1) et $\frac{3}{2}$ n'est pas une solution de l'équation (1)

Conclusion : **$z_0 = 2$ est une solution réelle de (E)**

b) 2 est une solution de (E) $\Rightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i =$

$(z-2)(a.z^2 + b.z + c)$

$\Leftrightarrow$

$z^3 - 2(3+2i)z^2 + 2(4+7i)z - 12i =$

$az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -6 - 4i \\ c - 2b = 8 + 14i \\ -2c = -12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 - 4i \\ c = 6i \end{cases}$$

Donc (E) est équivalente à l'équation :

$(z-2)(z^2 - (4+4i)z + +6i) = 0$

$\Leftrightarrow$ $z - 2 = 0$ ou $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$

On va résoudre $z^2 - (4+4i)z + +6i = 0$ en effet :

$\Delta' = (2+2i)^2 - 6i = 4(1+i)^2 - 6i = 8i - 6i = 2i = (1+i)^2$

Donc $\delta = (1+i)$

Par suite $z' = 2+2i+1+i = 3+3i$

$z'' = 2+2i-1-i = 1+i$

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{2, 3+3i, 1+i\}$

● $z_A = 2$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 3+3i$

a) Calculons les distances AB , AC et BC :

$AB = |z_B - z_A| = |1+i-2| = |-1+i| = \sqrt{2}$

$AC = |z_C - z_A| = |3+3i-2| = |1+3i| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$

$BC = |z_C - z_B| = |3+3i-1-i| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$

On remarque que :

$2 + 8 = AB^2 + BC^2 = AC^2 = 10$

D'après la réciproque de théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B

b) Pour que ABCD soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme car ABC est rectangle en B, on aura donc :

$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(\overrightarrow{DC}) \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

$\Leftrightarrow$ $z_D = z_C - z_B + z_A = 3 + 3i - 1 - i - 2 = 2i$

Donc $z_D = 2i$

● a) On a : $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = \frac{2iz + 3 - i - 1 - i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2iz + 2 - 2i}{z - 1 - i}$

$= \frac{2i(z - 1 - i)}{z - 1 - i} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) On a : $\text{Arg}\left(\frac{z' - z_B}{z - z_B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{MB}\right)$

$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

d'où (BM') $\perp$ (BM) ce qui prouve que le triangle BMM' rectangle en B

Exercice n° 12

(E): $z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0$

● a) remplaçant dans l'équation (E) z par 3i on aura :

$(3i)^3 - (6+3i)(3i)^2 + (9+12i)(3i) - 9(2+3i)$

$= -27i + 54 + 27i + 27i - 36 - 18 - 27i$

$= 54i - 54i + 54 - 54 = 0$

d'où 3i est une solution de (E)

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = (z-3i)(z^2 - 6z + 9 - 6i)$

$= z^3 - 6z^2 + 9z - 6iz - 3iz^2 + 18iz - 27i - 18$

$= z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i)$ donc

(E) est équivalente à l'équation $(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0$

● a) $u^2 = 6i = 6e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $u = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $u = -\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Or $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Et $\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{3} + i\sqrt{3}, -\sqrt{3} - i\sqrt{3}\right\}$

b) On a :

$(z-3i)\left[(z-3)^2 - 6i\right] = 0 \Leftrightarrow$

$(z-3i) = 0$ Ou $(z-3)^2 - 6i = 0 \Leftrightarrow$

$z = 3i$ ou $z - 3 = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ *ou* $z - 3 = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Par suite les solutions sont : $z_0 = 3i$, $z_1 = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$

Qaraytn Aqra Bech Qaraytn